

Distribuições em Finanças: de Lévy a Mandelbrot, de Sextus Empiricus a Taleb, passando por Wolfram



Escola de Economia da FGV/SP
2º Semestre 2010
Marcos Elias



Comecemos com um problema central: não observamos distribuições de probabilidades!

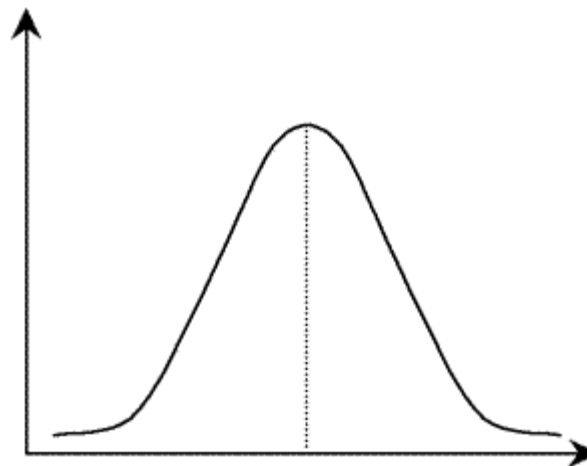
- O que podemos ver, observar são gráficos de preços, são séries temporais;
- Nos perguntamos então: qual a distribuição de probabilidade que melhor retrata esta série? Para desenvolvermos esta questão, precisamos tomar um determinado número de dados;
- Quantos dados são necessários? Lembremos que 1 único dado, dentre 2.500, pode fazer com que a variância de uma determinada distribuição vá de finita (caudas finas) para infinita (caudas gordas). Quantos dados devemos incluir? Quais deles mudam tudo?
- Ou seja, para determinarmos o número de dados necessários, teríamos que saber de qual distribuição de probabilidade estamos tratando (exemplo, para uma gaussiana, precisaríamos de 500 dados, e para uma distribuição de Lévy, 3.000 dados);

Então: para entendermos de qual DP estamos tratando, precisamos saber a priori de qual DP se trata!

Ler: <http://www.fooledbyrandomness.com/knowledge.pdf>

Algumas definições importantes (1):

- Processo Randômico: implica em falta de previsibilidade. É um processo repetitivo, em que as observações não produzem um padrão determinístico, mas que podem seguir um modelo de distribuição de probabilidade;
- Há dois tipos de variáveis randômicas, as discretas e as contínuas. Para finanças, temos observações discretas, mas que podem ser platonizadas como contínuas;
- Para uma variável randômica, há uma determinada distribuição de probabilidade (“DP”) associada. A DP descreve a relação entre os possíveis valores que a variável randômica pode atingir (em x) e a densidade de probabilidade (frequência da ocorrência de determinado valor/# total de observações) associada a cada um destes valores (em y);



Mode

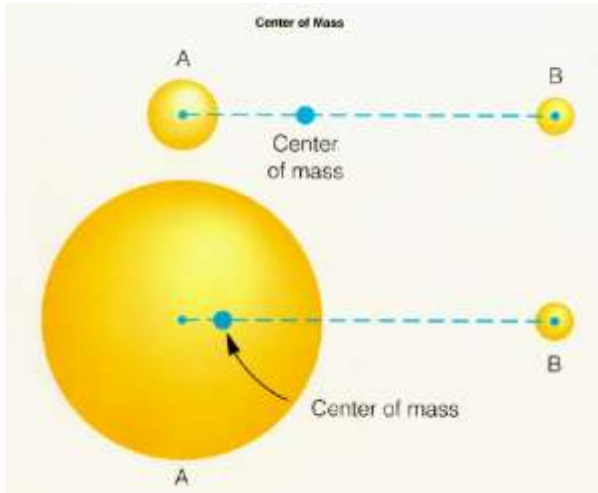
Mean

Algumas definições importantes (2):

- Uma variável randômica pode ser definida a partir de uma distribuição normal, uma distribuição de Cauchy, uma distribuição de Lévy, entre outras, tais como: de Pareto, Zeta, Zipf, Zipf-Mandelbrot, etc.;
- Estas distribuições de probabilidade (que são utilizadas para definirmos as variáveis aleatórias) podem ser estáveis, ou seja, qualquer combinação linear de duas cópias independentes da variável randômica apresentam a mesma distribuição, quanto à localização e aos parâmetros de escala, ou não-estáveis;
- Definição e significado de momento: os valores dos momentos nos dão informações a respeito do formato da curva de distribuição. Quanto maior a ordem do momento, maior é a contribuição de seus rabos (“tails”) na distribuição de probabilidade:
 - Primeiro momento: localiza o centro de gravidade da função probabilidade (média);
 - Segundo momento: é o momento de inércia em torno em torno do “centro de massa” (desvio-padrão);

Recordando conceitos (1):

Centro de Massa: é a localização média de toda a massa de um sistema



Momento de inércia: é a medida da resistência de um objeto às alterações em sua rotação

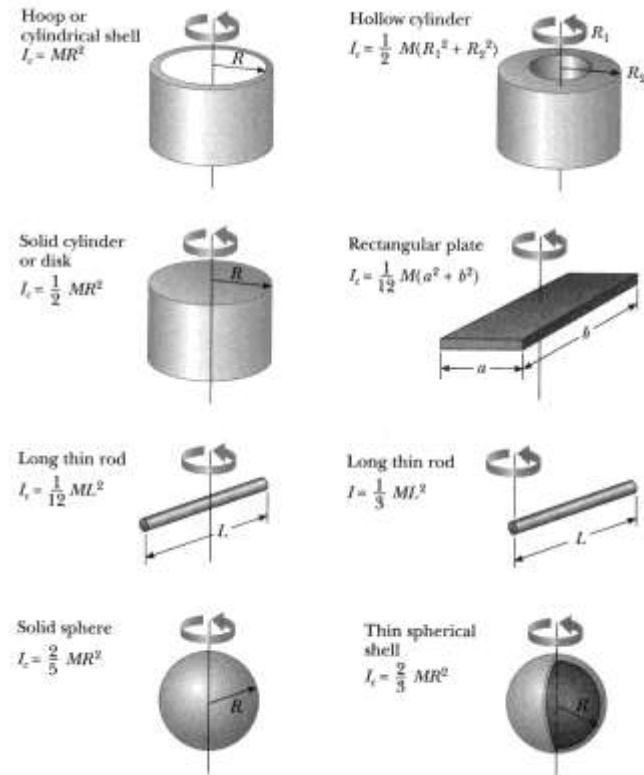
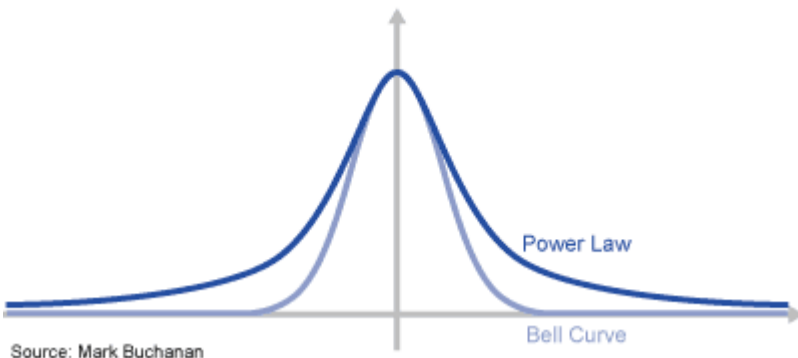


Exhibit 1:
The Bell Curve vs. the Power Law: The Importance of “Fat Tails”



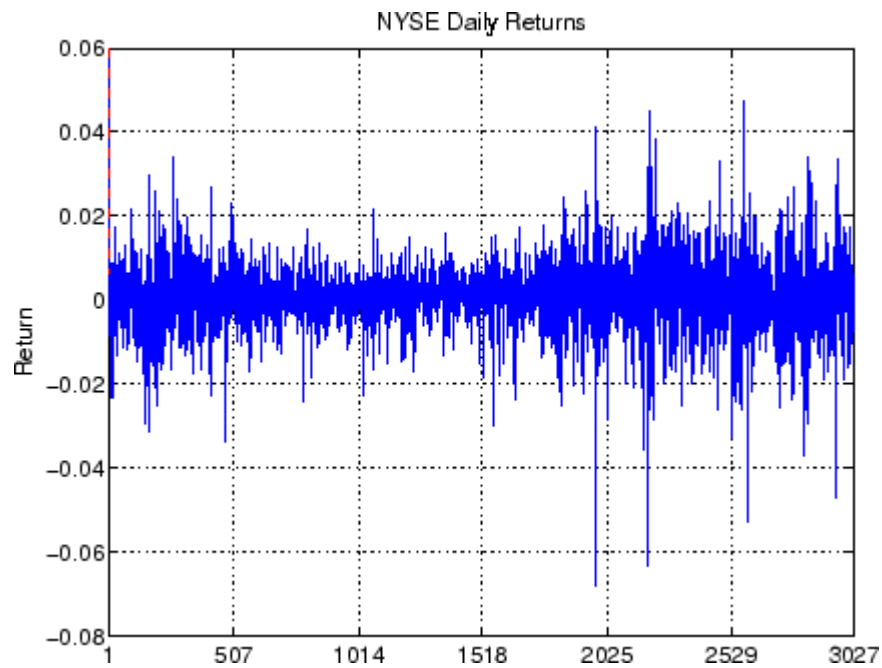
Source: Mark Buchanan

Qual é o maior momento de inércia, em torno de Y?



Distribuições Estáveis:

- Variáveis randômicas são consideradas estáveis se mantêm a seguinte propriedade: qualquer combinação linear de duas cópias independentes (duas “observações” diferentes da mesma variável, ou “duas pesquisas) desta variável mantêm a mesma distribuição de probabilidades, em relação à localização e aos parâmetros de escala;
- A distribuição normal é estável. Distribuições estáveis não-normais são frequentemente chamadas de distribuições Paretianas. Distribuições de Cauchy e de Lévy são estáveis;
- Todas as distribuições estáveis (contínuas) são infinitamente divisíveis;
- Com exceção da distribuição normal, todas as distribuições estáveis são leptocúrticas e apresentam caudas gordas;



“Large changes tend to be followed by large changes, of either sign, and small changes tend to be followed by small changes”

B.M.

Algumas distribuições de probabilidades importantes:

Distribuição Normal:

- Observações não guardam relação de dependência entre si;
- Ênfase na média;
- “Uma boa descrição de dados que tendem a se acumular em torno de uma média”;
- Aplicação: análise estatística da altura de adultos;

A altura média do americano é de 1,78m, enquanto o americano mais alto – Igor Vovkovinskiy – mede 2,34, o que é 30% maior do que a média – Gauss!!

Distribuição sob as Leis da Potência (Power Law): Lévy, Cauchy, etc.:

- Observações ainda são independentes;
- Ênfase em extremos (exemplos, na música, ou em risk management);
- Aplicação: distribuição de renda;

A renda média do americano é de US\$ 30 mil ao ano, enquanto o americano com maior renda média auferi US\$ 3 bilhões ao ano, o que é 100.000 vezes maior do que a média – Power Law!!!

Por que a distribuição de Gauss é ainda amplamente utilizada para retratar as finanças, a despeito das enormes evidências, e da lógica, de que é absolutamente inadequada?

- Porque a distribuição de Gauss tem uma forma analítica simples:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- em que apenas dois parâmetros, média e variância, determinam tudo. A fórmula é facilmente derivável “na mão”, sem necessidade de métodos computacionais;

Ou seja, de acordo com a regra de retórica do Pérsio Arida (*in* História do Pensamento Econômico, como Teoria e Retórica):

“O que é facilmente formalizável, tem um poder de retórica maior”

Há uma outra possível (e menos nobre) explicação:

- A falta de entendimento, por parte dos acadêmicos e dos praticantes, em como modelar, estimar e lidar com distribuições não-gaussianas.

Teorema do Limite Central (zentraler Grenzwertsatz)

- Nos diz sob quais condições a média de um número suficientemente grande de variáveis randômicas independentes, cada qual com média e variância finitas, será aproximadamente normalmente distribuída;
- Posto que as quantidades do mundo real são frequentemente uma soma balanceada de várias eventos randômicos não observados, este teorema fornece uma explicação parcial para a prevalência da distribuição normal;
- O Teorema do Limite Central também justifica a aproximação de grandes amostras estatísticas à distribuição normal em experimentos controlados;

Como chegou-se a distribuição normal?

-Primeiramente tomamos uma função quadrática: $g(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a < 0$, de forma que tal função seja côncava ;

- Depois criamos uma distribuição exponencial em cima desta equação quadrática: $f(x) = e^{-ax^2 + bx + c}$. Poderíamos tentar utilizar uma cte qualquer, mas utilizamos o número de Euler porque $de^x/dx = e^x$, o que facilita as coisas. Ainda lembremos da definição de e , que tem tudo a ver com juros compostos (variação de intervalos, até infinitésimos):

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

- Construamos uma parábola em cima de uma curva de Gauss. Note que $f(x) > 0$ sempre. Notemos ainda que a ajusta a largura do sino, b move o pico central ao longo de x , e c altera altura do sino;

- Para que $f(x)$ seja realmente uma função de probabilidade em \mathbb{R} , temos que ter:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

- O que só é possível se $a < 0$;

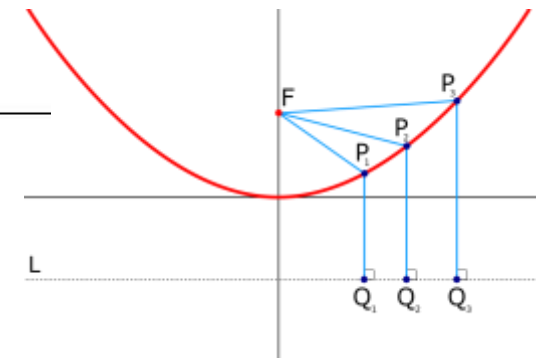
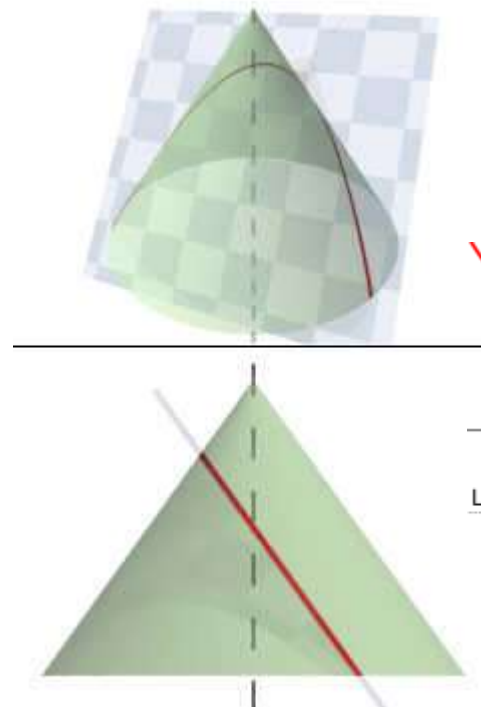
Como chegou-se a distribuição normal (continuação)?

- Ao invés de usarmos a , b e c , é muito mais comum descrevermos uma distribuição normal pela sua média, que é $-b/2a$ (que é o pico da parábola e da curva de Gauss, e que é a derivada da quadrática igualada a zero – máximo), e pela variância (ou desvio-padrão, que é $-1/2a$ (lembramos que a parábola é uma elipse que tem como um dos focos uma reta), e que mostra “o quão aberta” a curva é;

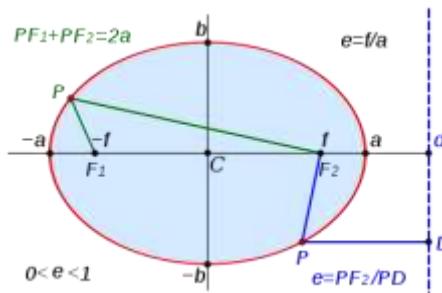
- Substituindo, chegamos à expressão geral:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Parábola



Elipse



E qual a “inspiração” para as distribuições fat-tailed?

- Lévy ou Cauchy também são distribuições inspiradas nas distribuições exponenciais;

http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/39664/18-366Spring-2005/NR/rdonlyres/Mathematics/18-366Spring-2005/6DEE7B72-6A36-46A2-93E7-F21399277FB2/0/lec22_neville.pdf

For above \hat{F} when $\beta = 0$ (ie. symmetric limiting distribution), you get the Lévy distribution. It is defined in terms of its Fourier transform.

$$\hat{L}_\alpha(a, k) = \hat{F}(k) = \exp(-a|k|^\alpha) \quad (20)$$

Two special cases of the the Lévy distribution are $\alpha = 1, 2$.

$$\alpha = 2 \quad \hat{F}(k) = \exp(-ak^2) \quad \text{like Gaussian but more general} \quad (21)$$

$$\alpha = 1 \quad \hat{F}(k) = \exp(-a|k|) \quad \text{Cauchy} \quad (22)$$

$$\hat{p}(k) = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} \longrightarrow p(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad \text{Gauss}$$

$$\hat{p}(k) = e^{-a|k|} \longrightarrow p(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \quad \text{Cauchy}$$

E qual a “inspiração” para as distribuições fat-tailed (cont)?

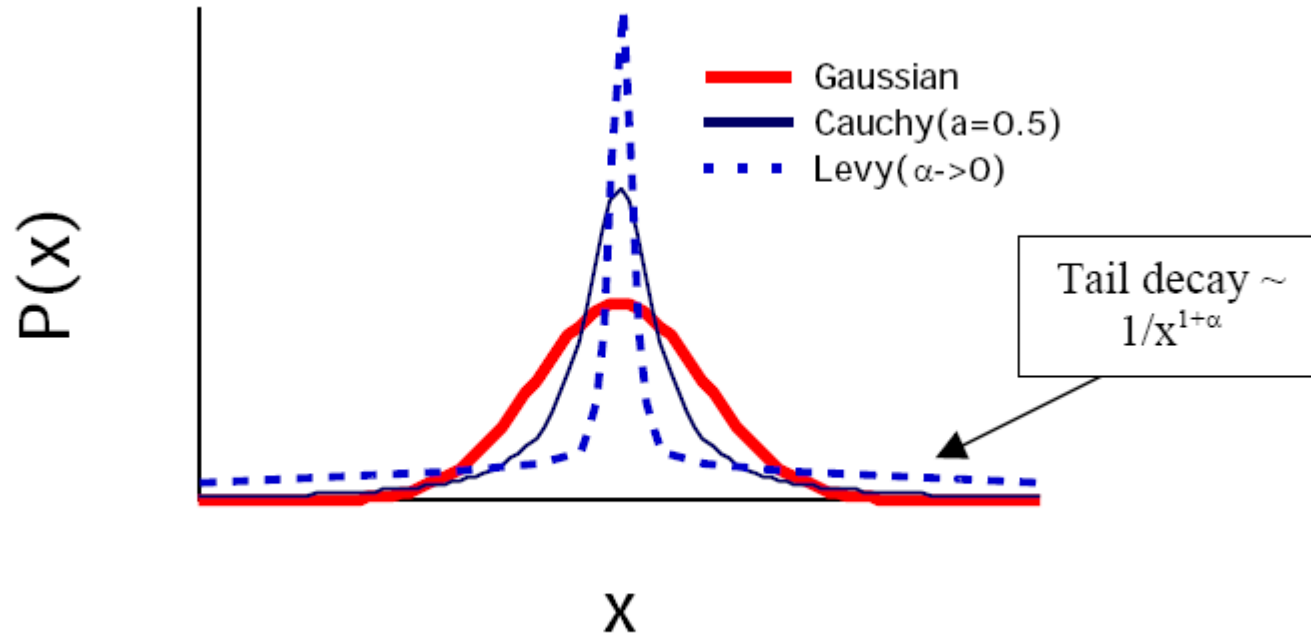


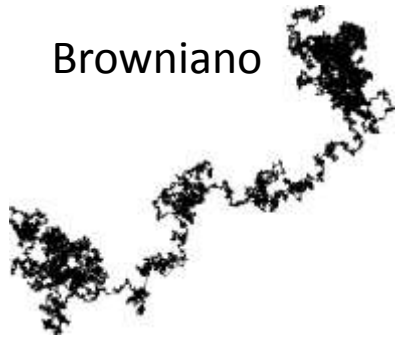
Figure. 1 Shapes of the Gaussian and Cauchy distributions compared with the Levy distribution as $\alpha \rightarrow 0$.

“While the returns may be independent, absolute values of these returns may not be, which causes extreme deviations to cumulate in a manner to fatten the tails at longer frequencies”, NNT

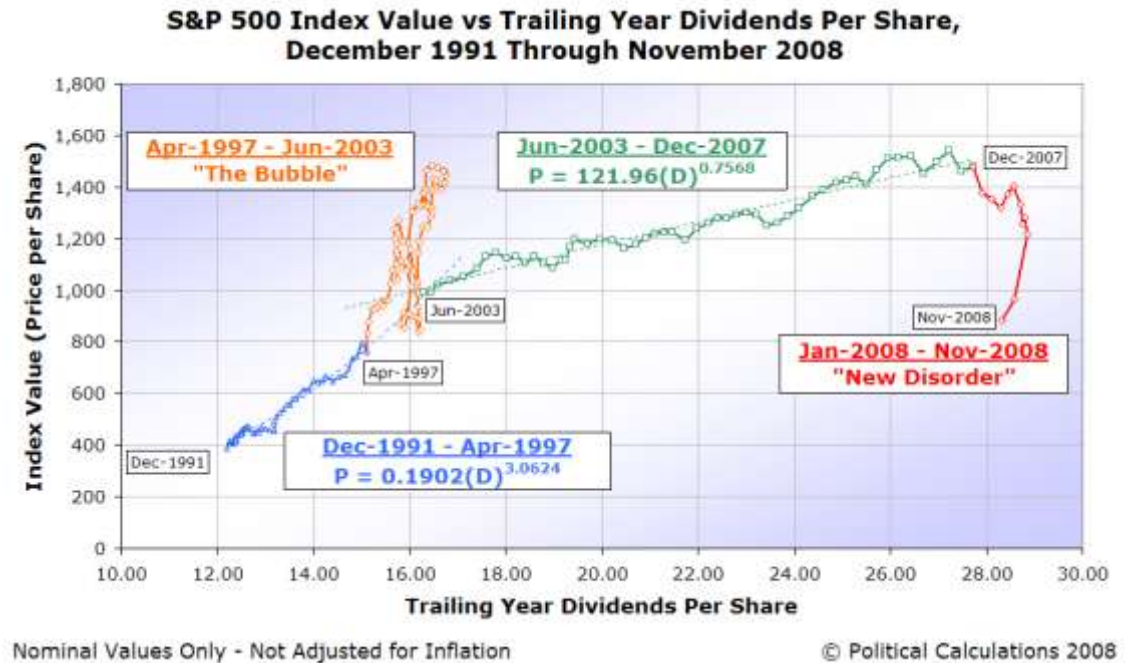
Lévy Flight

When sharks and other ocean predators can't find food, they abandon Brownian motion, the random motion seen in swirling gas molecules, for Lévy flight — a mix of long trajectories and short, random movements found in turbulent fluids. Researchers analyzed over 12 million movements recorded over 5,700 days in 55 radio-tagged animals from 14 ocean predator species in the Atlantic and Pacific Oceans, including silky sharks, yellowfin tuna, blue marlin and swordfish. The data showed that Lévy flights interspersed with Brownian motion can describe the animals' hunting patterns

Browniano



Lévy Flights



O que torna os voos de Lévy algo diferente é que este contempla, além de movimentos de pequena amplitude (que são também observados nos movimentos brownianos ou normais, não raro é observar movimentos também de grande amplitude

Um Exemplo Prático para Distribuição de Lévy

- Paper de Rosario Mantegna (PhD em física pela Universidade de Palermo) e Eugene Stanley (PhD em física por Harvard), publicado na Nature (Vol 376, página 46) em Julho de 1995, intitulado *Scaling behavior in the dynamics of an economic index* ;

-Dados foram obtidos da Bolsa de Chicago (CME). São 1.447.514 registros do Índice S&P 500, entre 1984 e 1989. Os intervalos de tempo para tomada de dados foram de: média de 1 minuto entre 1984 e 1985, e próximo a 15 s, entre 1986 e 1989. O tempo de trading foi definido como contínuo da abertura ao fechamento de cada pregão diário, e então “continuado” a partir da abertura do leilão seguinte;

- Foi verificada a adequacidade destes dados às distribuições estáveis de Lévy e aos modelos de ARCH/GARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity, que considera que a variância da inovação (que é a diferença entre o valor observado no tempo t e a previsão deste valor baseado em informações anteriores a t) é uma função do valor real dos tamanhos do período de tempo das inovações passadas). A diferença mais óbvia entre estes modelos reside nas “asas” (wings) das distribuições;

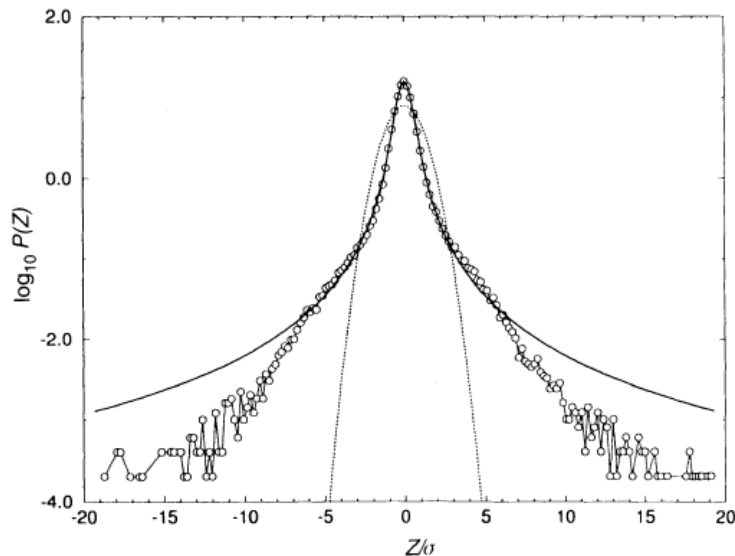


FIG. 2 Comparison of the $\Delta t=1$ min probability distribution with the symmetrical Lévy stable distribution of index $\alpha=1.40$ and scale factor $\gamma=0.00375$ (solid line). The scale factor γ is obtained from equation (2) by using the experimental values of α and $P(0)$. The dotted line shows the gaussian distribution with standard deviation σ equal to the experimental value 0.0508. The variations of price are normalized to this value. Approximately exponential deviations from the Lévy stable profile are observed for $|Z|/\sigma \gtrsim 6$.

Um Exemplo Prático para Distribuição de Lévy (cont.)

- As descobertas experimentais estão de acordo com os modelos de Lévy flight, para um alfa = 1,40. As caudas da distribuição, entretanto, mostram um claro desvio em relação à distribuição teórica de Lévy;
- As distribuições de Lévy tem um segundo momento infinito, e as descobertas experimentais mostram uma queda exponencial das asas da distribuição, o que significa momento finito. Em geral, principalmente para a região central da distribuição, mas tb em geral, as distribuições de Lévy retratam muitíssimo bem os dados;
- O Modelo GARCH é ruim para descrever os dados e resulta em um índice de escala de 1,88, enquanto o que observamos nos dados é de 1,4;

Problemas práticos em relação à finitude da variância das distribuições de probabilidade:

-O mundo funciona fora das assíntotas, ou dos limites. As propriedades fora das assíntotas são bastante diferentes daquelas NAS assíntotas. Exemplo: tomemos uma distribuição de retornos diários que tenha um segundo momento finito, mas com curtose infinita (grau de achatamento da curva), do tipo que observamos rotineiramente nos mercados. Se estendermos o período de medição dos retornos para semanas, meses, ou digamos, anos, essa distribuição poderá convergir para uma Gaussiana. Mas essa convergência se dará apenas no infinito. A distribuição se tornará Gaussiana no centro mas não nas caudas. Mesmo depois de milhões de convoluções (milhões de dados), a distribuição se comportará eventualmente como uma Gaussiana até o 3º desvio padrão, mas conservará seus atributos fora deste regime;

- De forma mais genérica, a agregação temporal de probabilidades de distribuição com algum momento infinito não obedecerão o Teorema do Limite Central;

- Encontrar os parâmetros em distribuições de Lévy, por exemplo, não é algo tão simples quanto no caso das distribuições de Gauss;

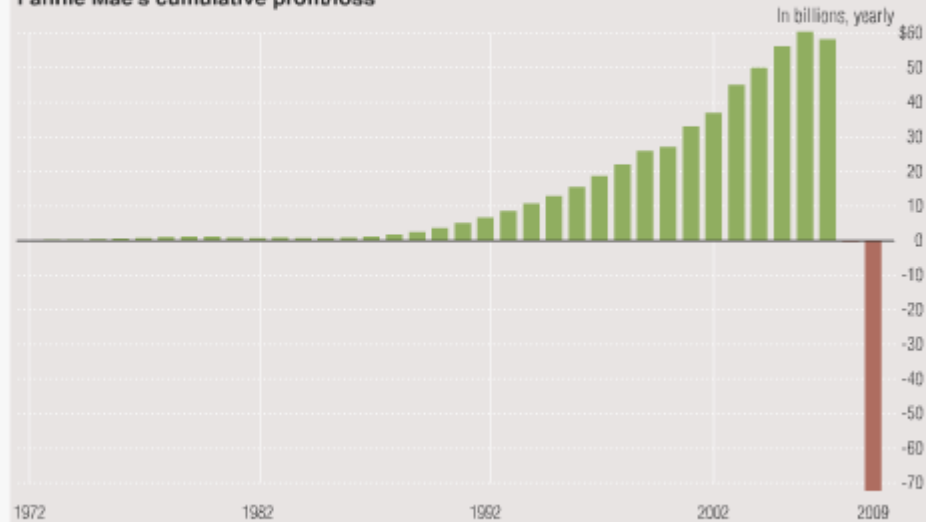
Anatomia de um Estouro

Erasing Decades of Profit

Bloomberg

Just a few years after House Financial Services Committee Chairman Barney Frank called Fannie Mae and Freddie Mac "financially sound," his committee is taking up legislation to overhaul them. Crippled by the housing crisis, the government-backed mortgage giants were placed in conservatorship in September 2008. That year alone Fannie Mae lost more than it had earned since it went public in 1970. By 2009, it had lost a cumulative \$72.4 billion.

Fannie Mae's cumulative profit/loss



Benoit Mandelbrot

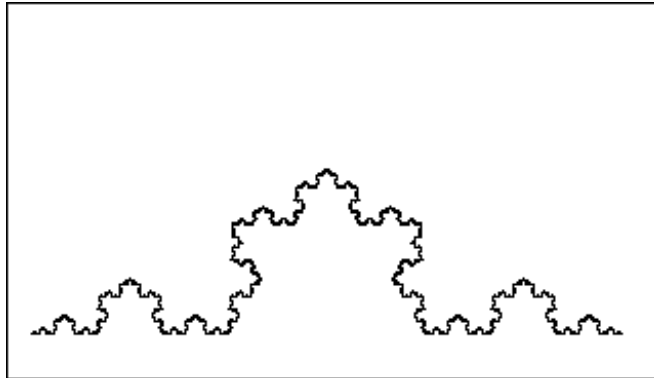
- Pai da Geometria Fractal;
- Escreveu em 1963 “The Variations of Certain Speculative Prices”;
- Desenvolveu modelos ,(em 1965) sobre o “movimento browniano fractal”, (em 1967) sobre “subordinações” e (em 1972) elaborou uma “abordagem geral envolvendo multifractais”;
- E depois, por falta de capacidade computacional, o mundo o esqueceu!

Um pouco de fractais para “aquecermos” (<http://classes.yale.edu/fractals/>):

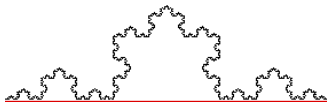
- Tomemos uma Curva de Koch, com o “initiator” dado por um segmento de tamanho de 1 metro, e como “generator”, a forma à direita:



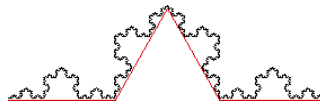
- Se aplicarmos o “generator” infinitas vezes sobre qualquer segmento, teremos como resultado a Curva de Koch:



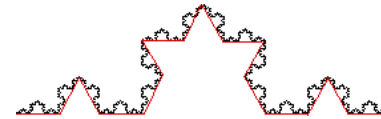
- Como medimos a Curva de Koch?



1 metro?



$4/3$ metro?

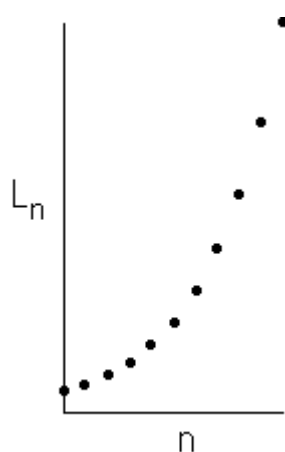


$16/9$ metro?

Um pouco de fractais para “aquecermos” (<http://classes.yale.edu/fractals/>) cont:

| n | Tamanho do segmento | Número de segmentos | tamanho |
|-----|-----------------------|---------------------|--------------|
| 0 | 1 | 1 | 1 metro |
| 1 | 1/3 | 4 | 4/3 metro |
| 2 | 1/9, que é $(1/3)^2$ | 16=4 ² | 16/9 metro |
| 3 | 1/27, que é $(1/3)^3$ | 64=4 ³ | 64/27 metros |
| ... | ... | ... | |
| n | $(1/3)^n$ | 4 ⁿ | $(4/3)^n$ |

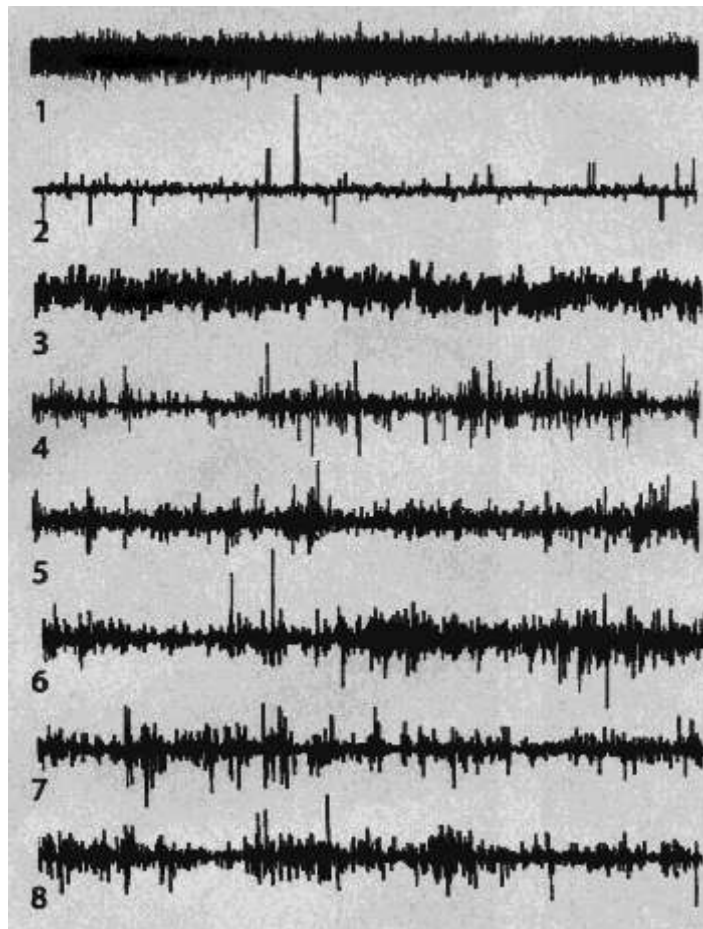
Para tornarmos esta computação concreta, note que se o tamanho original L0 é de 1m, então:



| | Tamanho do segmento | Número de segmentos | Tamanho da curva |
|------|---------------------------|---|------------------|
| L24 | 3.5(10 ⁻¹²) m | 281.474.976.710.656 | 1 km |
| L128 | 8.5(10 ⁻⁶²) m | 115.792.089.237.316.195.423.570.985.008.687.907.853 .269.984.665.640.564.039.457.584.007.913.129.639.93 6 | 1 ano-luz |

Ambos terão extensão horizontal de apenas 1 metro!

Quiz: um dos gráficos abaixo caracteriza o movimento Browniano, outro, o movimento Browniano fracionário, outro é um processo de Lévy, dois são dados reais de mercado e três são forjados a partir de multifractais. Quais são quais?

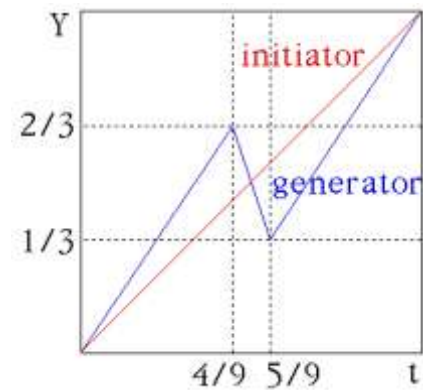
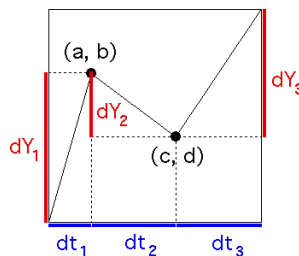


1 é movimento Browniano (independência, quase sem outsiders), 2 é um processo de Lévy (grandes saltos frequentes), 3 é um MB fracionário (valores dentro de bandas, mas com um número maior de outsiders), 4, 7 e 8 são multifractais, 5 são as cotações da IBM e 6 é a variação do câmbio dolar/deutschmark

Um Exemplo de fractais aplicado às séries temporais nos mercados financeiros, para começarmos

Primeiramente, selecionamos um iniciador e um gerador:

- O iniciador é um segmento de linha reta indo de (0,0) para (1,0);
- O gerador tem pontos de quebra em (4/9, 2/3) e em (5/9, 1/3);



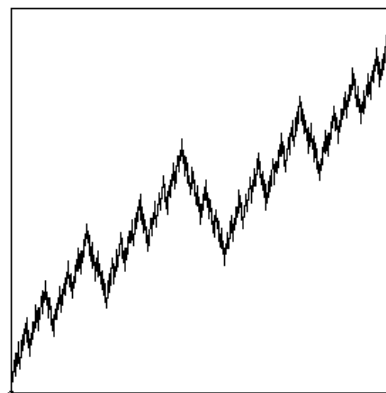
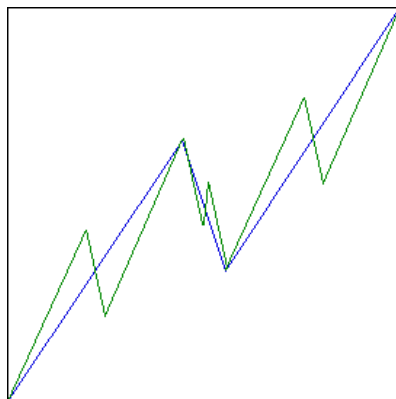
Note que:

| $dt_1=4/9$ | $dY_1=2/3$ | Então $dY_1=(dt_1)^{1/2}$ |
|--------------------|---------------------|---------------------------|
| $dt_2=5/9-4/9=1/9$ | $dY_2=1/3-2/3=-1/3$ | E, $-dY_2=(dt_2)^{1/2}$ |
| $dt_3=1-5/9=4/9$ | $dY_3=1-1/3=2/3$ | E, $dY_3=(dt_3)^{1/2}$ |

E ainda que todos os segmentos satisfazem:

$$|dY_i| = (dt_i)^{1/2}$$

Para construir um gráfico fractal, nós simplesmente tornamos este processo iterativo:



Note que este gráfico foi integralmente confeccionado utilizando-nos tão somente a equação acima. Mas, concordam que este chart é muito “regularzinho” para ser um retrato verossímil da realidade de mercado?

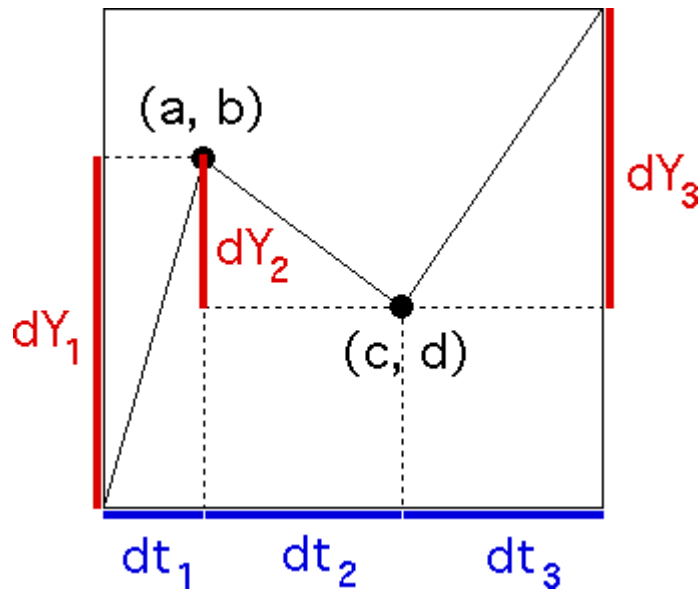
Um Exemplo de fractais aplicado às séries temporais nos mercados financeiros, para começarmos (cont)

Gráficos que satisfazem a relação abaixo são conhecidos como unifractais: $|dY_i| = (dt_i)^H$

Computar H é straightforward, basta tomarmos o log em ambos os lados e resolver a equação: $H = \text{Log} |dY_i| / \text{Log}(dt_i)$

H é o famoso Coeficiente de Rugosidade;

Vamos generalizar um pouco. Todos já concordamos que: $dt_1 + dt_2 + dt_3 = 1$ (a) e que $dY_1 + dY_2 + dY_3 = 1$ (b)



E como sabemos que os segmentos dos geradores podem se mover para cima ou para baixo, como queiramos:

$$(dt_1)^H - (dt_2)^H + (dt_3)^H = 1 \quad (c)$$

E finalmente, resolvendo a equação (a) para dt_3 , e substituindo em (c), temos a condição de escala unifractal:

$$(dt_1)^H - (dt_2)^H + (1 - dt_1 - dt_2)^H = 1$$

Um Exemplo de fractais aplicado às séries temporais nos mercados financeiros, para começarmos (cont)

Suponha que queiramos construir um gráfico unifractal com $H = 0,25$ and $dt_1 = 0,3$

A condição da escala implica que dt_2 seja determinado pela seguinte equação:

$$0.3^{0.25} - (dt_2)^{0.25} + (1 - 0.3 - dt_2)^{0.25} = 1.$$

(Lembremos que dt_3 é completamente especificado por dt_1 e por dt_2

O Mathematica consegue achar dt_2 usando o seguinte comando:

```
FindRoot[0.3^0.25 + x^0.25 + (1 - 0.3 - x)^0.25 == 1, {x, 2}]
```

Que nos fornece:

$$dt_2 = x = 0.135608$$

E, então, utilizando $dt_1 + dt_2 + dt_3 = 1$, nós obtemos:

$$dt_3 = 1 - 0.3 - dt_2 = 0.564392.$$

Agora partimos para calcular dY_i :

$$dY_1 = 0.3^{0.25} = 0.740083$$

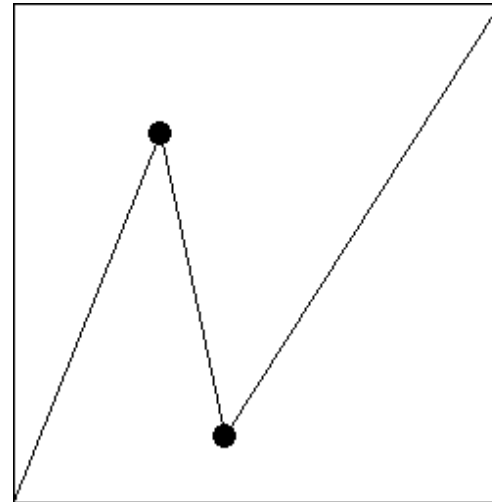
$$dY_2 = -(0.135608^{0.25}) = -0.606836, \text{ e}$$

$$dY_3 = (0.564392)^{0.25} = 0.86675.$$

Os pontos de quebra, portanto, são:

$$(a, b) = (dt_1, dY_1) = (0.3, 0.740083), \text{ e}$$

$$(c, d) = (dt_1 + dt_2, dY_1 + dY_2) = (0.435608, 0.133247).$$



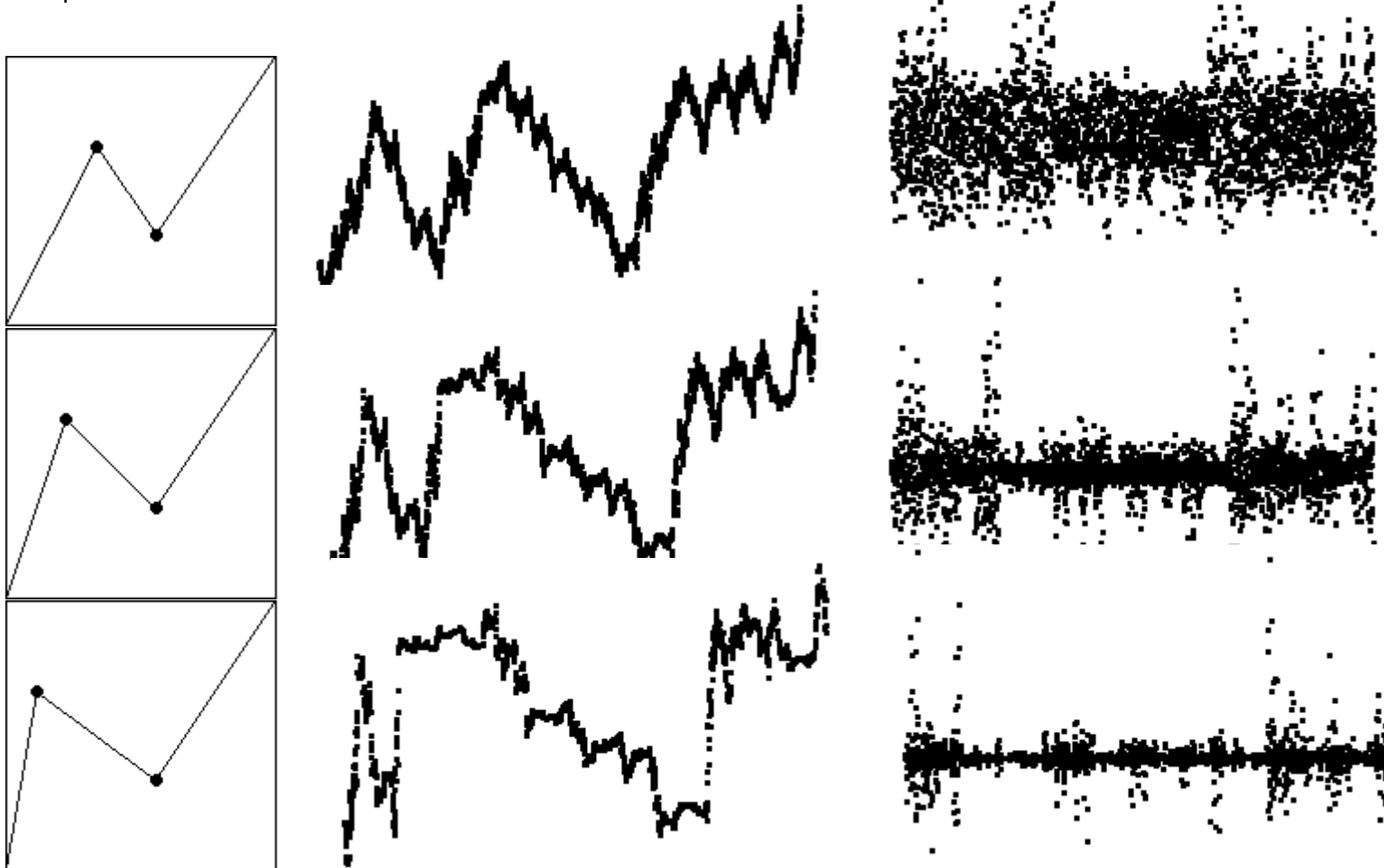
Aplicação, com multifractais

Os multifractais constituem uma das mais frutíferas áreas de pesquisas em finanças;

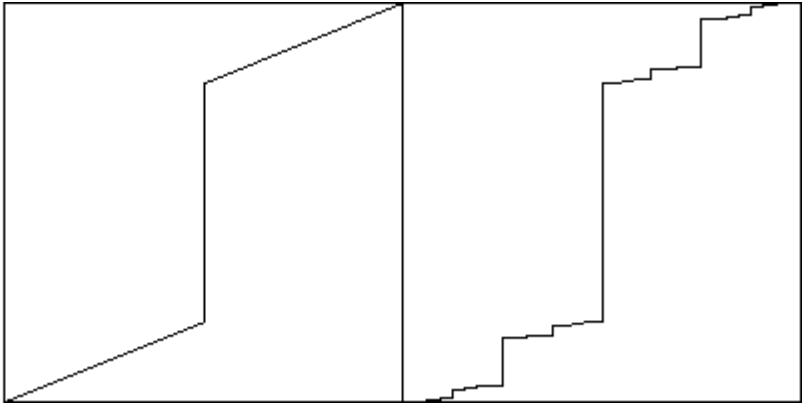
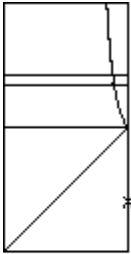
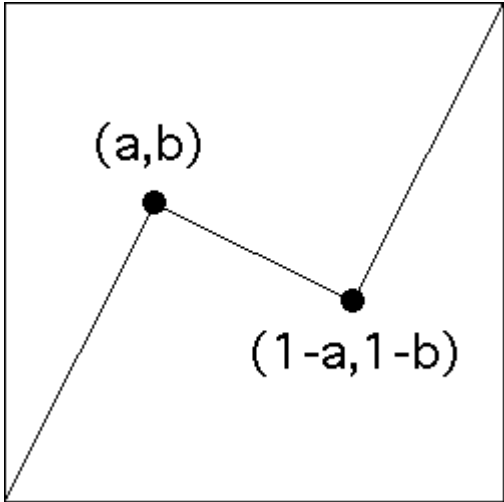
Aqui nós permitiremos que o expoente H varie, de um segmento para o outro, para um mesmo gerador: $|dY_i| = (dt_i)^{H_i}$

Então H_1 , H_2 e H_3 podem ser diferentes;

Vejam só o poder de uma única alteração em um ponto de quebra ou inflexão:



O ponto de quebra (a,b) pode se situar em qualquer lugar no retângulo $0 \leq a \leq 1/2$ and $0 \leq b \leq 1$



Trading Time com multifractais

<http://classes.yale.edu/fractals/>

The cartoon with turning points $(4/9, 2/3)$ and $(5/9, 1/3)$ is a [unifractal cartoon](#) of [Brownian motion](#).

It does not give a convincing forgery of real stock market data: it lacks the global dependence and long tails of observed data.

By changing the (dt_i, dY_i) , we can obtain [convincing forgeries](#) of real data.

Now we shall see there is an elementary way to change the way we measure time so these two effects, global dependence and long tails, are disentangled.

First, some notation.

Plots of Y vs t are called **price vs clock time** graphs.

To mimick real data, these graphs must be multifractal.

We shall find a way to rescale time to a new variable, T , so the plot of Y vs T is a unifractal.

This time is called **trading time**.

We shall show that every multifractal cartoon can be reexpressed as a unifractal cartoon in (multifractal) trading time.

The Price vs Trading Time graph exhibits global dependence, but not long tails; the Clock Time vs Trading Time graph exhibits long tails.

Trading Time com multifractais (cont)

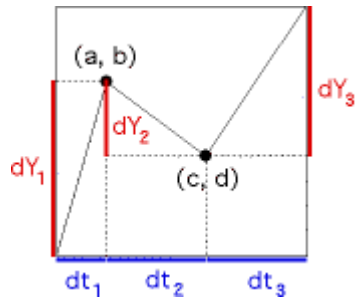
Common market experience includes the observation that slow changes are intermingled with very rapid changes.

The idea underlying **trading time** is to **compress the time scale of slow changes and expand the time scale of rapid changes**.

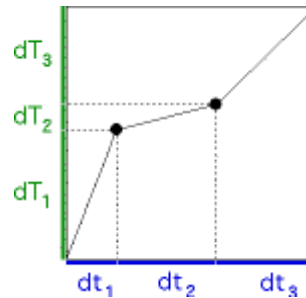
An alternative name could be **VCR time**: fast-forward through the commercials (where nothing interesting is happening), then study a particularly fast tennis shot in slow-motion.

Our goal is to find a variable adjustment to the time scale, to compress the slow changes and expand the rapid changes into graphs of about the same roughness.

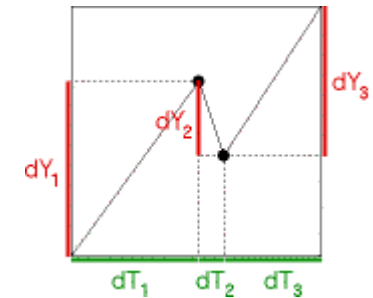
How can this be accomplished? There are stree steps.



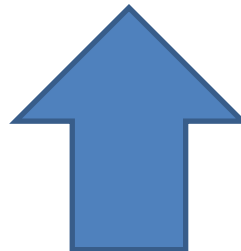
First, we compute the [price and clock time increments](#) dY_1 , dY_2 , dY_3 , dt_1 , dt_2 , and dt_3



Second, we compute the [trading time increments](#) dT_1 , dT_2 , and dT_3 .



Third, we build the [price vs trading time generator](#).



Trading Time com multifractais (cont)

We need a technical result:

Proposition If $0 < |dY_1| < 1$, $0 < |dY_2| < 1$, and $0 < |dY_3| < 1$, then there is a unique number D satisfying $|dY_1|^D + |dY_2|^D + |dY_3|^D = 1$.

Moreover, if $|dY_1| + |dY_2| + |dY_3| > 1$, then $D > 1$.

Prova:

Define a function $f(D)$ by

$$f(D) = |dY_1|^D + |dY_2|^D + |dY_3|^D$$

Certainly, $f(D)$ is a continuous function of D . Note:

$$f(0) = |dY_1|^0 + |dY_2|^0 + |dY_3|^0 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Next, because each dY_i satisfies $|dY_i| < 1$, we have

$$\lim_{D \rightarrow \infty} f(D) = 0.$$

Finally, the graph of $f(D)$ is decreasing because:

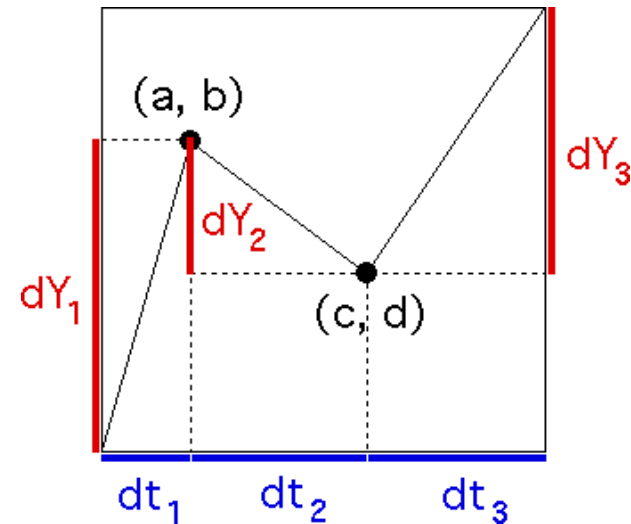
$$f'(D) = |dY_1|^{D-1} \ln |dY_1| + |dY_2|^{D-1} \ln |dY_2| + |dY_3|^{D-1} \ln |dY_3| < 0$$

(each $\ln |dY_i| < 0$ because each $|dY_i| < 1$) Here is an example graph of $f(D)$.

Note the shape of the graph implies there is a unique value of D giving $f(D) = 1$.

Finally, if $|dY_1| + |dY_2| + |dY_3| > 1$, then $f(1) = |dY_1| + |dY_2| + |dY_3| > 1$.

Because the graph of $f(D)$ is decreasing, the value of D making $f(D) = 1$ must satisfy $D > 1$. **(Similar à Moran Equation)**



Trading Time com multifractais (cont)

Define the trading time increments dT_1 , dT_2 , and dT_3 by

$$dT_1 = |dY_1|^D \quad dT_2 = |dY_2|^D \quad dT_3 = |dY_3|^D$$

Note all the trading time increments are positive.

This is no surprise, because although trading time may go more rapidly or more slowly than clock time, it cannot go backwards relative to clock time.

We will have no violations of causality here.

With the trading time and clock time increments we construct the trading time vs clock time generator.

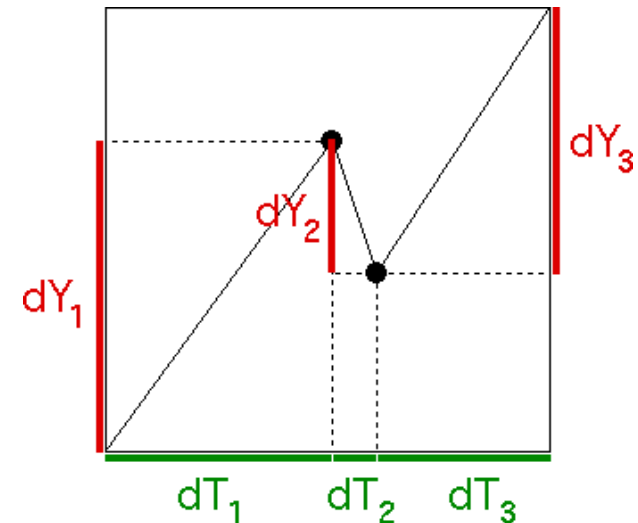
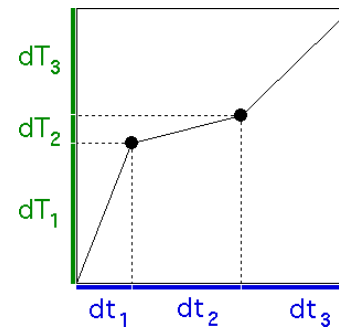
Então:

Using the price and trading time increments, we construct the price vs trading time generator.

Note the price vs trading time generator is unifractal, because

$$|dY_1| = (|dY_1|^D)^{1/D} = dT_1^{1/D}, \quad |dY_2| = (|dY_2|^D)^{1/D} = dT_2^{1/D}, \quad \text{and} \quad |dY_3| = (|dY_3|^D)^{1/D} = dT_3^{1/D}$$

That is, the same exponent relates $|dY_i|$ and dT_i for $i = 1, 2$, and 3 .



Trading Time com multifractais (cont)

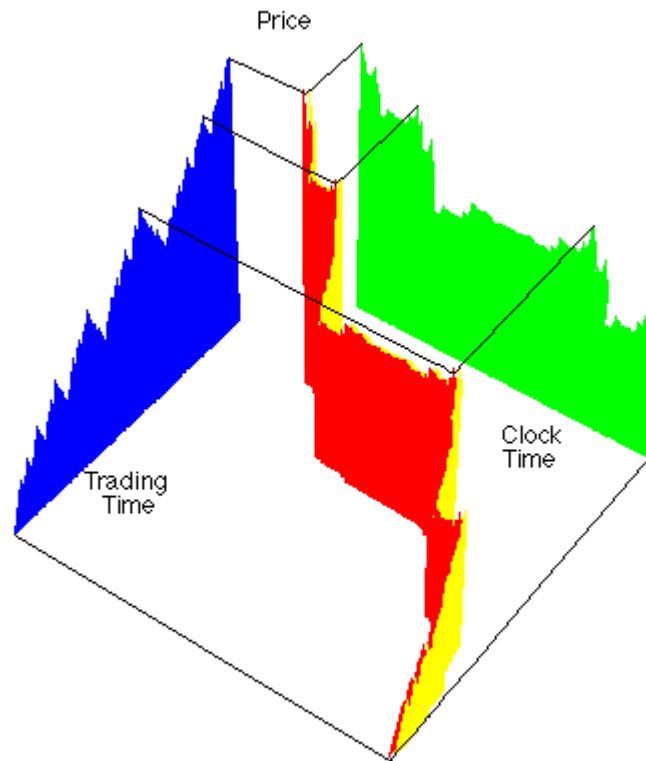
This picture illustrates the conversion process in a single 3-dimensional graph.

Note how the Clock Time-Trading Time curve compresses the flat regions and expands the steep regions of the Price-Clock Time graph.

Thus the long tails of the Price-Clock Time graph are absorbed into the multifractal time measure.

In addition, the dependence of increments is uniformized to fractional Brownian motion in the Price-Trading Time graph.

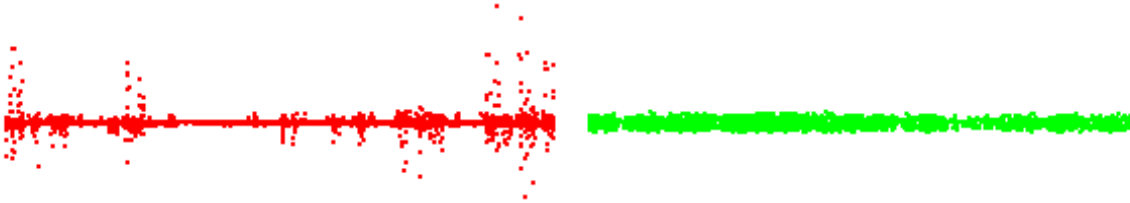
That is, the conversion to Trading Time decomposes long tails and dependent increments into different aspects of the graph.



Trading Time com multifractais (cont)

<http://classes.yale.edu/fractals/>

We see the graphs of **price vs clock time** differences and **price vs trading time** differences, plotted on the same scale.



Note the conversion to trading time has removed the large outliers of the difference graph in clock time.

This conversion to trading time has an interesting interpretation.

The **price vs trading time difference plot** has none of the large jumps we see in the **price vs clock time difference plot**.

In fact, the price vs trading time difference plot looks much more like a [fractional Brownian motion](#) difference plot.

The conversion from price vs clock time to price vs trading time absorbs the large jumps into the (multifractal) time conversion graph, and makes more visible the dependence structure.

Multifractality: Theory and Evidence an Application to the French Stock Market

This article presents the basics of multifractal modelling and shows the multifractal properties of the French Stock Market (CAC40). Monte Carlo simulations prove that the Multifractal Model of Asset Returns (MMAR) is a better model to replicate the scaling properties observed in the CAC40 series than alternative specifications like GARCH or FIGARCH.

5 Conclusion

The method developed by Calvet *et al.* (1997abc) and Calvet and Fisher (2002) which use concepts such as scaling function and multifractal spectrum, allows us to detect multifractality of the CAC40 series. This result implies the use of the MMAR to model the CAC40 series. Monte Carlo simulations show that MMAR seems to be a better model than GARCH or FIGARCH to replicate the main scaling features observed in the financial time series.

Alguns papers (2)

http://arxiv.org/PS_cache/physics/pdf/0605/0605147v2.pdf

Multifractal Model of Asset Returns versus real stock market dynamics

There is more and more empirical evidence that multifractality constitutes another and perhaps the most significant financial stylized fact. A realistic model of the financial dynamics should therefore incorporate this effect. The most promising in this respect is the Multifractal Model of Asset Returns (MMAR) introduced by Mandelbrot *et al.* [1] in which multifractality is carried by time deformation. In our study we focus on the Lux extension to MMAR and empirical data from Warsaw Stock Exchange. We show that this model is able to reproduce relevant aspects of the real stock market dynamics.

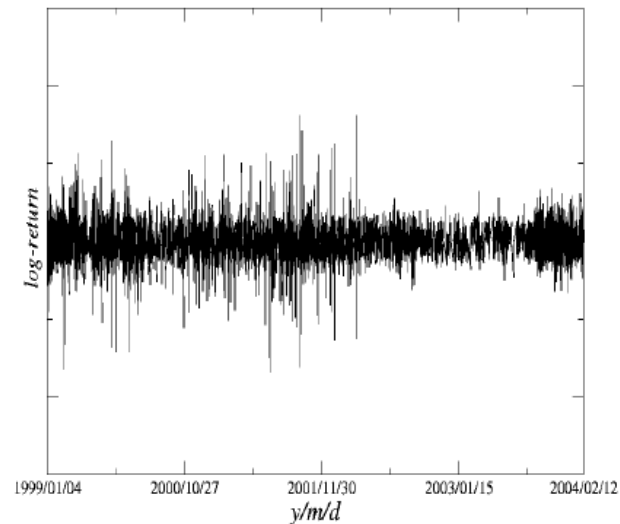


Fig. 1. Time series of WIG20 log-returns covering the analyzed period.

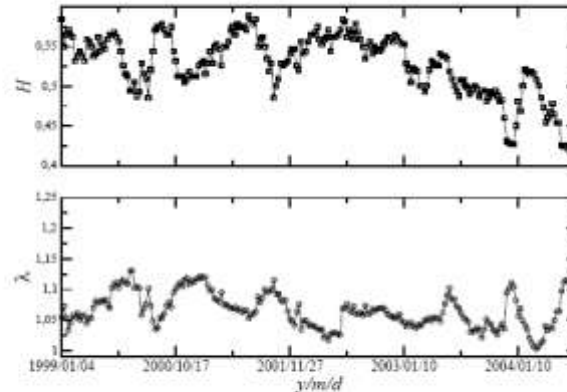


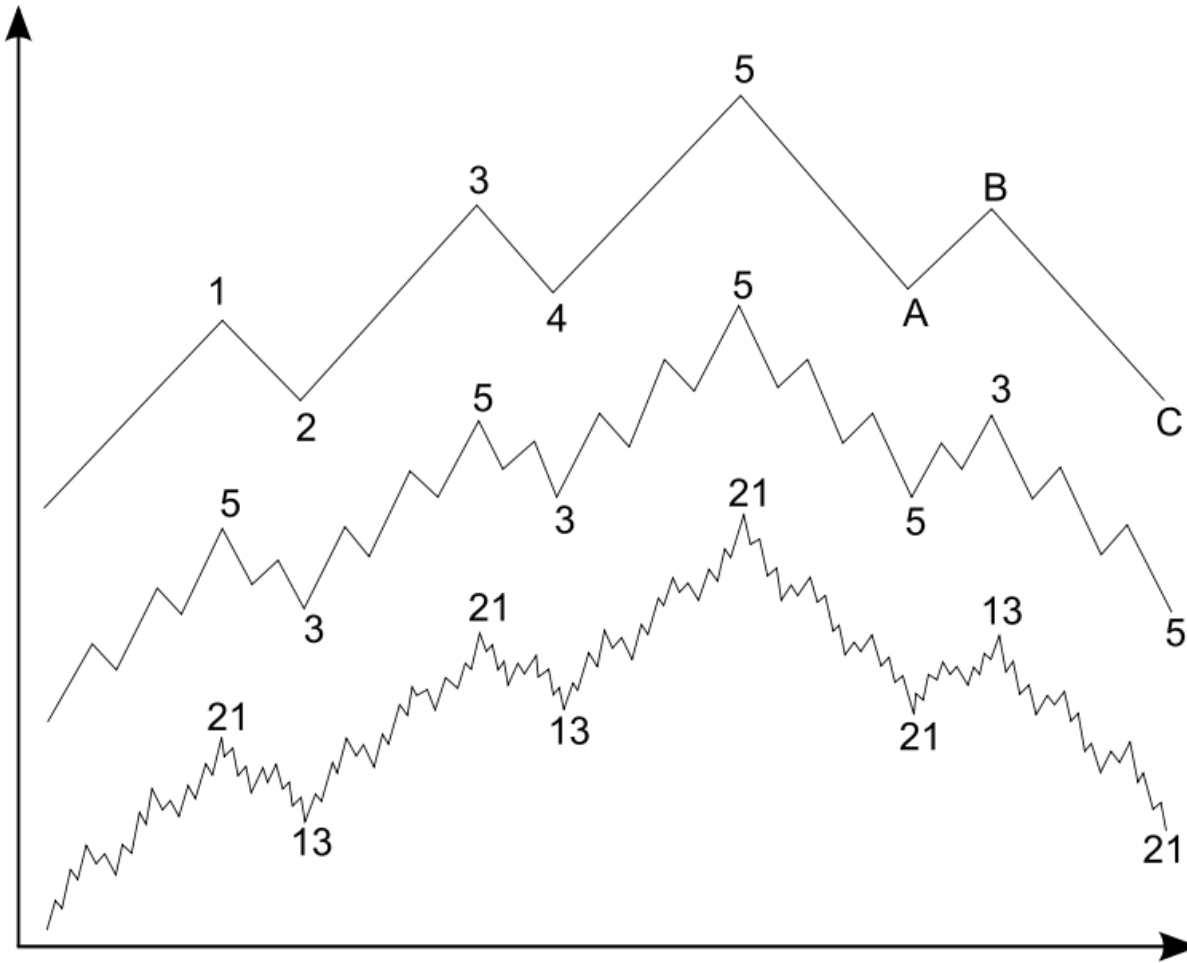
Fig. 5. Simultaneous temporal evolution of Hurst exponent H (top) and parameter λ (bottom). Open symbols denote position of the first point for each window position.

6. Conclusions

The study presented in this paper reveals several interesting facts about dynamics of the Polish stock market. First, we see that the WIG20 fluctuation magnitude changes in the first half of year 2002. This suppression of the largest fluctuations is also visible in c.d.f. of the log-returns. Moreover, we identify this nonstationarity of WIG20 in evolution of the parameter λ of the Lux model. These observations indicates that this model is able to reproduce at least some of the financial data characteristics and to help one with detecting evolution phases with different properties. In the last step we include in our analysis the empirical estimation of the Hurst exponent, a parameter which is necessary for the forecasting purpose. As our results document, value of this parameter largely determines the multifractal properties of the WIG20 evolution, leaving λ only as an auxilliary measure.

O Princípio das Ondas de Elliott se baseiam em fractais?

http://en.wikipedia.org/wiki/Elliott_wave_principle



Cellular Automata

- Criado por Stephen Wolfram (http://en.wikipedia.org/wiki/Stephen_Wolfram)

- Como no caso dos fractais, é um método para criar artificialmente (ou emular) séries de mercado;

- É uma simulação da dinâmica do mercado financeiro, a partir de um modelo estocástico chamado Cellular Automata;

- Por exemplo, imaginemos que um determinado mercado possa ser emulado por uma matriz 512 x 128, de mais ou menos 66 mil traders. Para cada célula, associemos um conjunto finito de estados (como um spin). Se o estado da célula é “trader inativo”, seu valor é 0. Se é “trader ativo comprador”, atribuímos o valor +1, e se é “trader ativo vendedor”, atribuímos o -1;

- Definimos uma área de influência para cada célula, por exemplo, de acordo com o critério de von Neumann (direita, esquerda, acima e abaixo). Mas, de novo, poderíamos desenhar essa área de influência ao nosso bel prazer;

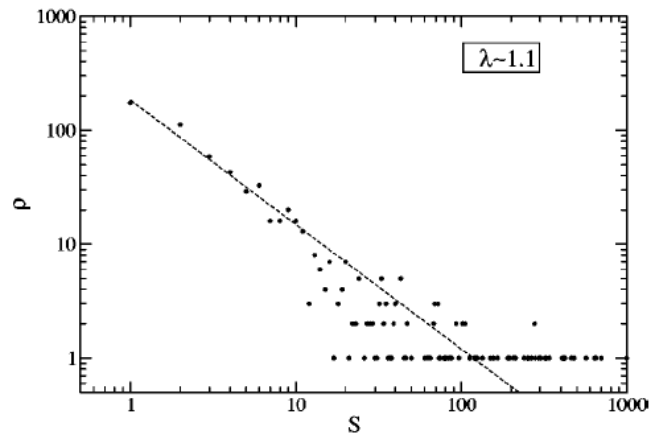
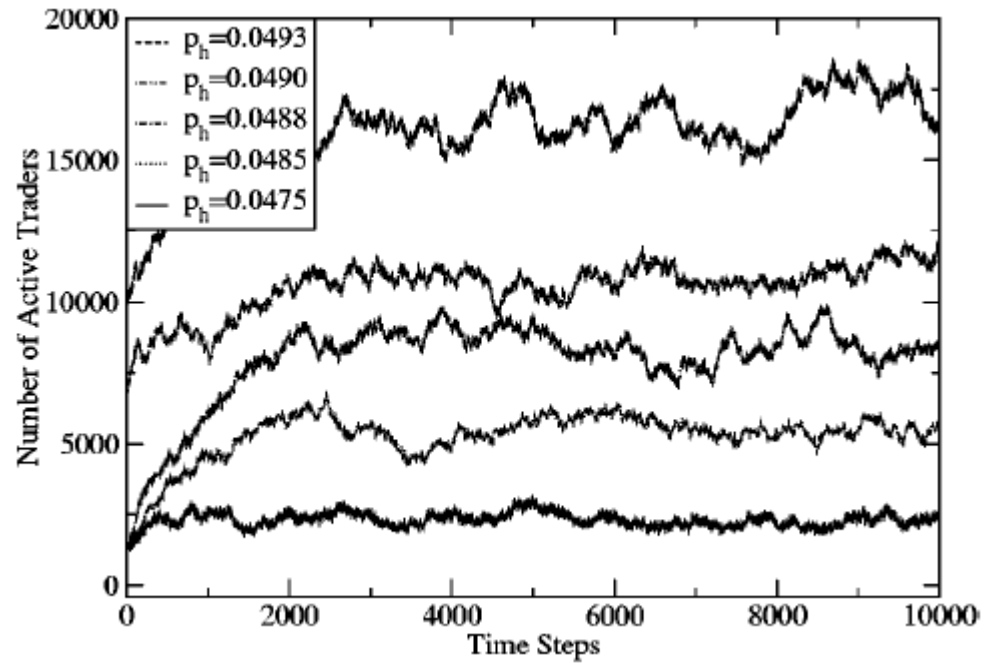
- Nosso critério de percolação é o seguinte: **P_h** é a probabilidade de um trader ativo qualquer de tornar seu vizinho inativo em ativo, no próximo incremento de preço. Potencial indutor; **P_d** é a probabilidade de um trader qualquer se tornar inativo, se pelo menos um dos seus vizinhos é inativo. Isso simula de que apenas os traders que estão nas fronteiras do network, ou seja, os links mais fracos, desistirem do mercado; **P_e** é a probabilidade de uma célula inativa qualquer se tornar espontaneamente ativa;

The values of the adimensional parameters, p_h , p_d , and p_e , influence the stability of the system and the percentage of active traders on the grid. In order to test different market activities we fix the values $p_d=0.05$ and $p_e=0.0001$ while we tune the parameter p_h . At the beginning of the simulation the grid is loaded randomly with a small percentage of active traders and then the system is permitted to evolve according to the previous rules. If we are in a stable range of the parameter p_h , after a transient period that depends both on the parameter values and the initial number of active cells, the number of active traders on the grid begins to fluctuate around a certain average, as shown in Fig. 1 (top). The market can be considered *open* since the number of agents changes dynamically in time. In this regime, the competition between herding and diffusion produces a power law distribution of the cluster size, as shown in Fig. 1 (bottom), $\rho(S) \approx S^{-\lambda}$, where S is the cluster dimension, defined as the number of active cells belonging to the same cluster, and $\lambda > 0$, creating a hierarchy of networks. This hierarchy is

necessary if we are to take into account a real aspect of the market, namely, that different traders also have different trading powers. A reasonable assumption is that people having a larger number of sources of information, so belonging to greater clusters, can be associated with professional investors that, most likely, are able to move a greater amount of stocks compared to the occasional investor. Using this assumption we are able to define a proper weight for the trading power of different cells, as we will discuss in the following section.

A similar percolation model has also been used to reproduce some statistical and geometrical features of solar activity [36,37].

Cellular Automata (cont)



Cellular Automata (cont)

- Temos matrizes de 512×128 para cada momento t , como mostram as figuras:

- Como calculamos $P \times t$? Devemos construir P (índice de preços) a partir do número e do tamanho dos clusters formados nos grids, além de constantes;

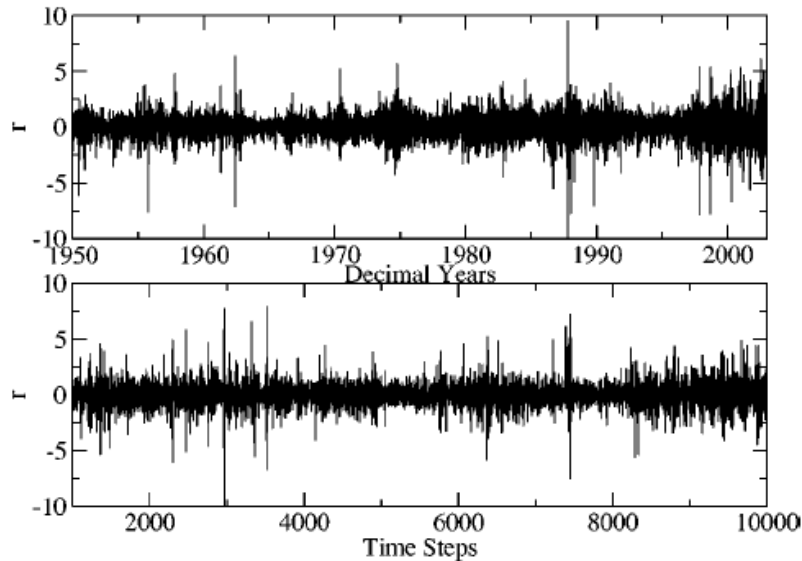


FIG. 2. Top: Normalized logarithmic returns for the S&P500. Bottom: Time series of returns reproduced with the simulation with $p_h=0.0493$, $A=1.8$, and $h=0$.

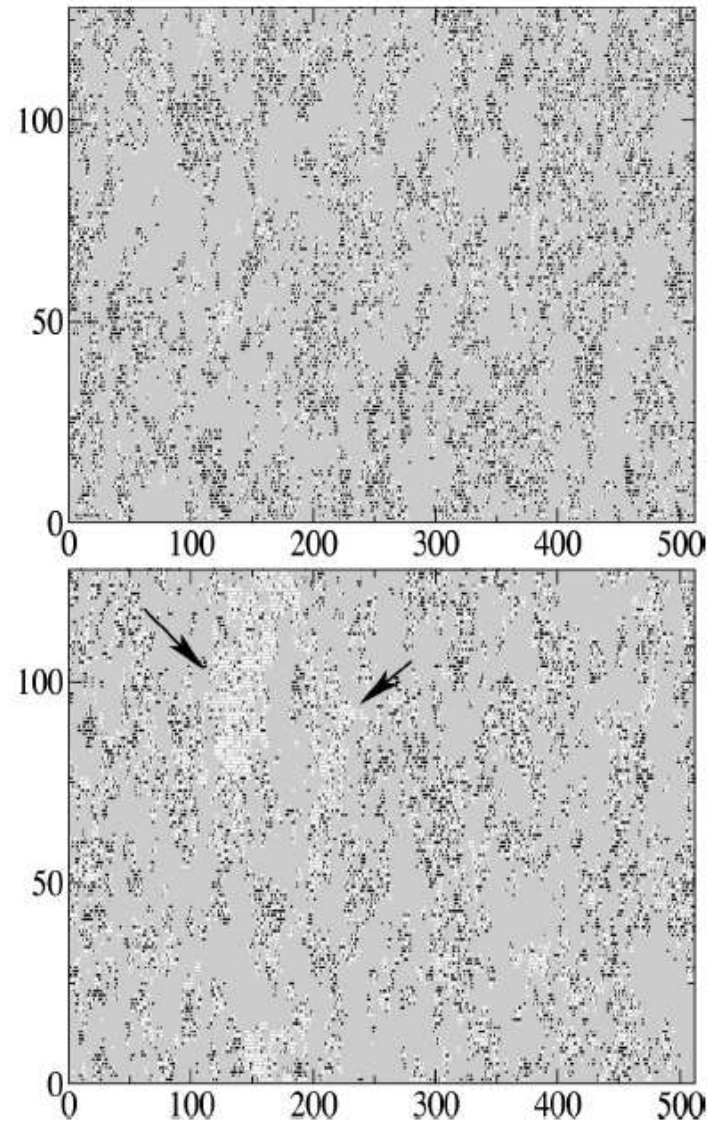


FIG. 4. Top: Snapshot of the grid during a normal trading period. The black cells are the buyers while the white ones are the sellers. The parameters used in this simulation are $p_h=0.0493$, $A=1.8$, and $h=0$. Bottom: The same simulation during a crash. Large clusters of sellers are indicated by arrows.

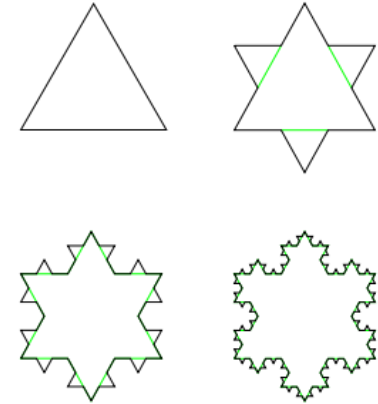
Dimensão Fractal e Expoente de Hurst

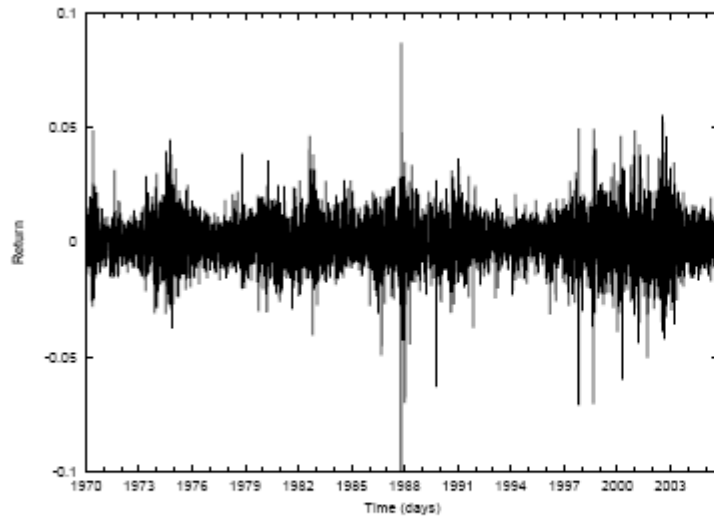
- Dimensão fractal é uma quantidade estatística, que nos dá uma indicação de quão completamente um fractal parece conseguir preencher o espaço;

- Exemplo: uma linha ou segmento de reta ou reta tem uma dimensão. Uma circunferência tem dimensão 1 (a dimensão é o quanto de informação que você precisa para descrever um ponto no espaço. No caso da circunferência, o ângulo. Entropia.) E um círculo tem dimensão 2 (ângulo e raio). Um plano tem duas dimensões. E os flocos de neve de Koch?

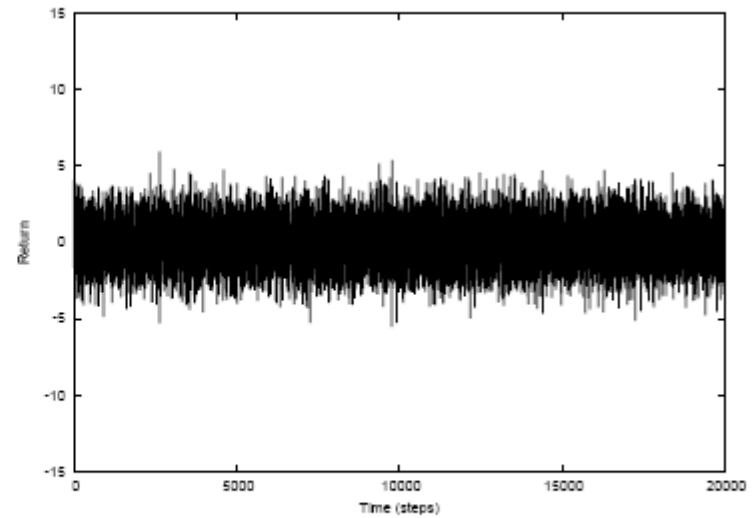
-Não é uma curva retificável, e a distância entre quaisquer dois pontos é infinita. Nenhum pedaço é uma reta, mas também não chegam a formar um plano. É grande demais para ter 1 dimensão e é pequeno demais para ter 2 dimensões;

- Tomamos D como uma dimensão euclidiana





(a) Time series of return of S&P 500.



(b) Time series of a Gaussian variable.

One way to measure the normality of a distribution is its *Kurtosis*, κ , which is defined as:

$$\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4}. \quad (2.9)$$

where μ_4 is the fourth central moment and σ is the standard deviation of the distribution.

There are several reasons for considering the statistical properties of volatility:

- Volatility can be directly related to the amount of information arriving in the market;
- Volatility can be directly used in the modeling of stochastic process governing the price changes;
- From a practical point of view, volatility is a key indicator for measuring risk of financial investments [20].